国立大学法人
大阪教育大学

理数情報教育系　数学教育部門　岡安　類

# あみだくじ と 15パズル

## 1. 概要

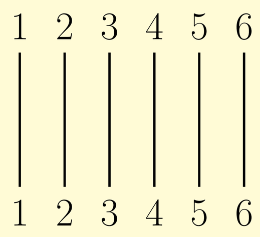
数学の学習が進むと抽象度が増し，日常生活や社会との関わりが希薄になると感じ，学習意欲が低下すると考えられている．身近な題材を利用した数学の活用方法を紹介することは，数学により興味をもってもらうために大切である．今回は，大阪教育大学学校教育教員養成課程の必修科目である小学校教科専門科目「算数」で紹介した題材の中から「あみだくじと15パズル」について紹介する．

## 2. あみだくじ

「あみだくじ」とは，線の端にアタリ・ハズレなどを書いて隠し，各自が引き当てるくじである．現在は，平行線の間に横線を入れ，はしご状にすることが多い．子供の頃にあみだくじをしたことはあるだろうが，決められた結果になるようにあみだくじに細工することを考える．

**問題 1 (あみだくじ)**

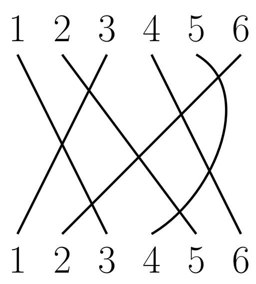
$1 \to 3,\quad 2 \to 5,\quad 3 \to 1,\quad 4 \to 6,\quad 5 \to 4,\quad 6 \to 2$ となるあみだくじを作れ．



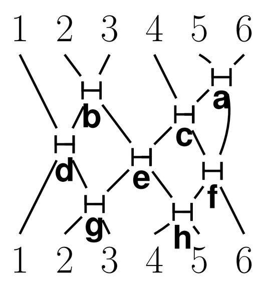

適当にやっても，いつかは目的のあみだくじを完成させることはできるだろうが，できるだけ「効率的に」作る方法を２つほど紹介する．

**★あみだくじの作り方1★**

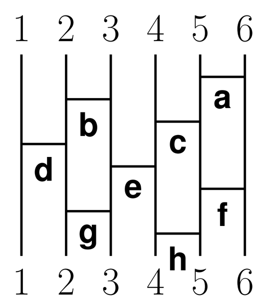
1. スタートを上段，ゴールを下段として，目的の数字同士を線で結ぶ．ただし，交点は２つの線分のみで，３線以上が１点で交わらないようにする．これを簡易型あみだくじと呼ぶ(図1)．
2. 交点を消し，アルファベットのHのようなものを描くとわかりやすい．それぞれに名前をつけても良い．ここでは小文字のアルファベットa,b,c,...を用いた(図2)．
3. それを見ながら目的のあみだくじを完成させる(図3)．




(図1)



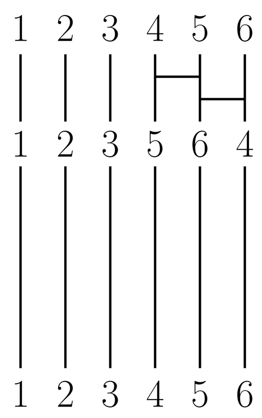

(図2)



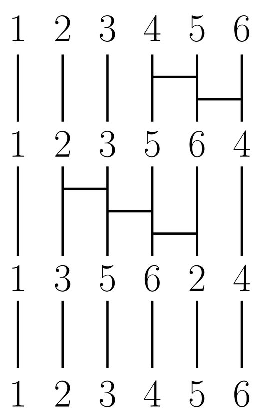

(図3)

**★あみだくじの作り方2★**

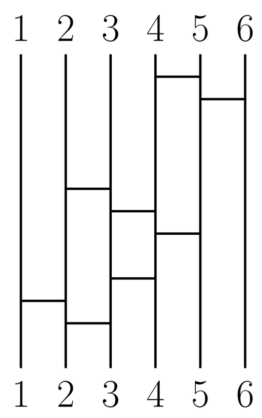
1. 右下の $6$ に注目し，$4 \to 6$ となる横線を引き，他の数字もどこに到達するか書く(図4)．
2. 次に隣の $5$ に注目して，$2 \to 5$ となるように横線を先ほどの下に書く(図5)．
3. 以下同様に,$4$,$3$ と繰り返し，最後にすべての縦線をつなぐとあみだくじが完成する(図6)．



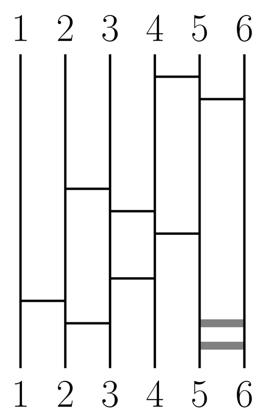

(図4)




(図5)




(図6)




(図7)

ここで，２つの完成したあみだくじを見比べると,横線の本数は同じ8本ではあるが，形が異なる．実際,同じ結果になるあみだくじは無限に存在する．例えば,「無駄」に横線を増やすことはいくらでもできる．図6で右下に2本の横線を増やしても結果は変わらない(図7)．しかし同じ結果になるあみだくじの横線の引く本数の「偶奇」は変わらないことが知られている．証明には数学的な専門知識（主に線形代数学で学ぶ置換）を必要とするため,ここでは省略する．

**定理 1 (あみだくじの横線の本数)**

結果が同じであるあみだくじの横線の本数の偶数・奇数は変わらない．

## 3. 15パズル

「15パズル」とは，スライディングブロックパズルの一種である．4×4のボードの上に①～⑮までの駒があり，1駒分のスペースを利用して，目的の配置にするゲームである．通常は図8のような配置に並べることを目的とする．この配置のものを標準形と呼ぶ．標準形とは限らない配置のものも含めて，一般に15盤と呼ぶ(例えば図9)．1878年サム・ロイド(Sam Loyd)が絶対に解けないパズルに1000ドルの賞金をかけて出題し，15パズルは多く販売されるようになったことは有名な話である．絶対に解けないパズルとして出題されたものは，標準形の⑭と⑮を入れ替えたものである．これをロイド形と呼ぶことにする(図10)．

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | |

(図8)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 | 14 | 1 | 6 |
| 9 | 11 | 4 | 12 |
| | 10 | 7 | 3 |
| 13 | 8 | 5 | 2 |

(図9)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 15 | 14 | |

(図10)

ロイド自身は恐らく経験的に解けないことを知っていたものと思われるが，ここでは実際に解けないことを数学を用いて証明したい．

**定理 2 (ロイド形)**

ロイド形は駒をスライドすることで標準形に変形できない．

話を簡単にするために3×3タイプの「8パズル」で考えることにする．この場合，図11の形が標準形である．これを $P_0$ と名付ける．以下，わかりやすいように図12の8盤を例に考えることにする．これを $P$ と名付ける．またスペースにも数字 $\boxed{9}$ を入れて考えることにする．

$P_0 =$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | |

(図11)

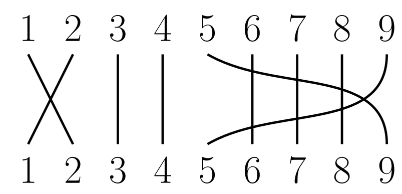
$P =$

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 |
| 4 | 9 | 6 |
| 7 | 8 | 5 |

(図12)

さて問題を数学を用いて定式化しよう．日常生活に現れる問題を数学の世界に落とし込むのが，数学の醍醐味の一つだと思う．この8盤 $P$ は,標準形 $P_0$ と比べると，本来入るべき数字と異なる数字が入っている．そこで8盤 $P$ を図13の左のように表示する．上段が標準形 $P_0$ の数字で，下段が実際に8盤 $P$ に入っている数字を表す．(これは前述の線形代数学で扱う置換である.)また(上段の数字)→(下段の数字)の対応の簡易型あみだくじと見ることもできる(図13右)．

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \boxed{9} & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} =$$




(図13)

この簡易型あみだくじの交点の個数は $8$ 個である．交点はあみだくじの横線と対応していて，個数は一通りではなかったが，以下では，その「偶奇」のみが重要であるので，このまま議論を進める．一般の8盤 $P$ の簡易型あみだくじの交点の個数を $n(P)$ で表す．

次に駒を動かすことによって，$n(P)$ の偶奇がどう変わるか見よう．そこでスペース $\boxed{9}$ の動きに注目する．$\boxed{9}$ を1マス右に動かす．(実際は⑥を1マス左に動かす.) その結果を $P'$ とする(図14)．

$P =$

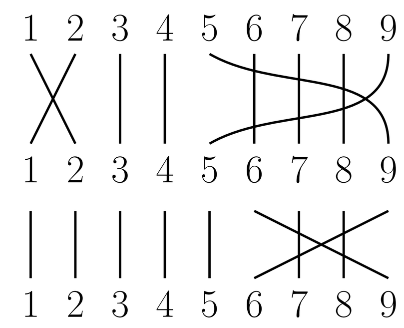
| | | |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 |
| 4 | 9 | 6 |
| 7 | 8 | 5 |

$\longrightarrow$

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 |
| 4 | 6 | 9 |
| 7 | 8 | 5 |

$= P'$

(図14)




(図15)

$n(P')$ を求めるために，$P'$ の簡易型あみだくじを作れば良いが，⑥と $\boxed{9}$ の入れ替えを行ったので，図15のように $P$ の簡易型あみだくじの下に付け加える形で求めても良い．交点が $5$ 個増えたので，$n(P') = 8 + 5 = 13$ とわかる．つまり，$n(P)$ が偶数であり，駒を１マス動かすと $n(P')$ が奇数に変わった．実はどの方向に駒を動かしても，偶奇が入れ替わる．一般に次がわかる．

**定理 3**

任意の8盤 $P$ の $\boxed{9}$ を1マス動かして，$P'$ ができたとすると，$n(P)$ と $n(P')$ の偶奇は入れ替わる．

定理2の証明のために，さらにひと工夫する．8盤の駒の位置を行列のように名付ける(図16)．

$P =$

| 行＼列 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 3 |
| 2 | 4 | 9 | 6 |
| 3 | 7 | 8 | 5 |

(図16)

8盤 $P$ に対する $n(P)$ は，数字の配置のみに関係する値であるが，8盤 $P$ を標準形に変形するためには，スペースの位置も重要である．スペースの位置 $\boxed{9}$ の情報を盛り込んだ $\tilde{n}(P)$ を導入する．

**定義 4**

8盤 $P$ の $\boxed{9}$ の位置が $i$ 行 $j$ 列にあるとき, $\tilde{n}(P) := n(P) + i + j$ と定義する．

図16の8盤 $P$ ならば，$\boxed{9}$ は2行2列にあるので，$n(P) = 8$ であったから $\tilde{n}(P) = 8 + 2 + 2 = 12$ となる．次に，$P$ から $\boxed{9}$ を1マス動かした結果を $P'$ とするとき，$\tilde{n}(P)$ と $\tilde{n}(P')$ の関係はどうなるか考えてみよう．図14のように $\boxed{9}$ を右に動かすと，$P'$ の $\boxed{9}$ が2行3列に動く．$n(P') = 13$ であったから

$$\tilde{n}(P') = n(P') + 2 + 3 = 13 + 2 + 3 = 18$$

となり, $\tilde{n}(P)$ と $\tilde{n}(P')$ はともに偶数である．一般にどの方向に動かしても $\tilde{n}(P)$ と $\tilde{n}(P')$ の偶奇が一致することが確認できる．

**定理 5**

任意の8盤 $P$ を変形して，$P'$ になったとすると，$\tilde{n}(P)$ と $\tilde{n}(P')$ の偶奇が一致する．

標準形 $P_0$ に対して $n(P_0) = 0$ であり，さらに $\boxed{9}$ の位置は3行3列であるから，$\tilde{n}(P_0) = 0+3+3 = 6$ つまり $\tilde{n}(P_0)$ は偶数である．よって,ある8盤 $P$ が変形を繰り返して標準形 $P_0$ にできたと仮定すると, $\tilde{n}(P)$ は偶数でなければならないことがわかる．

**定理 6**

8盤 $P$ は標準形に変形できるならば，$\tilde{n}(P)$ は偶数である．
よって, 対偶を考えると, $\tilde{n}(P)$ が奇数ならば，8盤 $P$ は標準形に変形できない．

以上は3×3タイプの8パズルで考えていたが，15パズルで行っても全く同様である．それでは最後にロイド形が標準形に変形できないことを確かめよう．図10のロイド形を $P_L$ とするとき，⑭と⑮が入れ替わっているだけなので，$n(P_L) = 1$ であり，スペースの位置は4行4列だから $\tilde{n}(P_L) = 1 + 4 + 4 = 9$ と奇数となるので，定理6より標準形に変形できないことがわかった☺
実際は定理6の逆「$\tilde{n}(P)$ が偶数ならば標準形に変形できる」も正しいことが知られている．