国立大学法人
大阪教育大学

教育協働学科　理数情報専攻 (理数情報講座)　縄田 紀夫

作用素環と自己同型

1. 数とは

数学では, “数”を学びます． 実社会において“数”とは，量を表すものと考えることが自然だと思います．高等学校までに学ぶ“数”として

$$\text{自然数} \subset \text{整数} \subset \text{有理数} \subset \text{実数} \subset \text{複素数}$$

といったものがあります. (複素数は平面ベクトルと思うと向きを込めた長さと思うことができます.) これらの数の集まりの数学的な特徴の一つとして和と積があることが挙げられます．和と積が定義されている数学的対象として(現在の指導要領には入ってない)行列があります. 2次正方行列の和と積は以下のようなものでした.

$$\text{和} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{pmatrix}$$

$$\text{積} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$$

(現代純粋)数学では, 数学的対象の特徴的な性質だけ取り出して抽象的に考えていくことが多いですが，和と積があるだけで「行列も同じ“数”として考える」と言っても受け入れることはできないと思います. また，行列の積は上に挙げた数と決定的に違う性質があります. それは, 非可換ということです．つまり，

$$AB \neq BA$$

となる行列AとBが存在します．ますます行列を“数”と思うことが難しくなってしまったかもしれませんが，実は行列のような非可換な対象を量として考える物理学の理論があります. それは, 1920年代にハイゼンベルグ(行列力学)やシュレディンガー(波動力学)によって確立された量子力学の理論です. 量子力学では位置や運動量といった量が, 行列を一般化した無限次元の作用素というもので表されます. つまり, 量子力学を考えると行列を“数”として扱って研究することは自然なことであり必要なことでもあります. 実際には, “数”として扱うというよりも(可換な)数と行列のような非可換な数学的対象との間にある類似と本質的な違いを研究する必要があると言ったほうが正しいかもしれません.

2. 無限次元

量子力学では無限次元空間というものを考える必要があります. 0次元は点, 1次元は直線，2次元は平面, 3次元は私達が生きている空間ですが，直感的には4次元以上の空間を考えることは難しいかもしれません. 更にその上の無限次元というと想像することもできないでしょう. しかし, 座標やベクトルという概念を考えると数学的には4次元というものは実数が4個並んでいて和とスカラー倍のあるベクトルの集まりと考えることができます．このことから無限次元も単に無限個の実数が並んでいるベクトルの集まりということができます. つまり, 数列$\{a_n\}$の集まりが単純な無限次元空間です．他にも数が“連続”的に並んでいると考えることができる関数の集合も無限次元空間の例です. ただし, 厳密には特別な数列の集合や特別な関数の集合を考えないと解析することが難しく，きれいでおもしろい数学的理論はできません. (厳密に特別な関数とは何かということを説明するためには大学で学ぶ微分積分学，複素関数論，測度論等を必要とします. “完備性”という極限操作に関する性質が重要なキーワードとなります.)
(量子力学において物理量を表す)無限次元の作用素とは，無限次元空間上の線形変換です. つまり, 無限次元空間を特別な数列の集まりと思うと無限個の行と列を持つ行列のことであり, 以下のように視覚的に表すことができます.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

作用素は数を無限個並べているだけで行列とあまり変わらないように見えるかもしれませんが, 様々な無限次元特有の性質を満たすものがあり興味深いものです.
一方，無限次元空間を特別な関数の集合と考えると関数を微分する

$$f(x) \quad \mapsto \quad \frac{d}{dx}f(x)$$

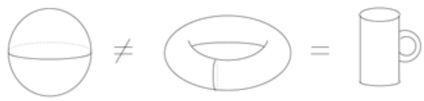
という変換が作用素の例になります. $\infty \times \infty$行列と微分はまったく違うものに見えるかもしれませんが，実は“同じもの”と考えることもできます.

3. 作用素環

今まで説明したことから, 無限次元の作用素について理論を構築したいと考えることは数学的に(物理学的にも)自然なことだと思います．ただし, 非可換性や無限次元の性質を理解するためには一つの作用素を考えるよりも作用素の集まりを考えた方が理解が深まり, 新しい世界が広がります. 例えば，6という数を考えたときに6という量だけを見ていてもよくわかりませんが, 整数の中で考えることによって$6=2\times 3$と分解されるということがわかり, 6という数は2や3といった素数と本質的に違うものだと認識することができて新しい世界が広がります. 特に, 整数のような和と積という代数演算を持った集まりは環と呼ばれます.
本研究の主役である作用素環とは，(有界線型)作用素の集まりで和と積などの代数演算を持つものです. また，どのような極限操作をすることができるかという性質で作用素環はvon Neumann環とC^*-環というものに大きく分けられます．ここで厳密な定義について述べることはちょっと難しいので, von Neumann環とC^*-環の(対外的な)スローガンを紹介します. それは,

$$\text{von Neumann環の研究} \quad = \quad \text{非可換測度論},$$
$$C^*\text{-環の研究} \quad = \quad \text{非可換トポロジー}$$

です. 可換なvon Neumann環が測度空間上の本質的有界な関数のなす環と“同じ”になり, 可換なC^*-環が位相空間(局所コンパクトハウスドルフ空間)上の連続関数環と“同じ”になることからこのように呼ばれます.
トポロジーとは柔らかい幾何学とも呼ばれ, 互いに連続的に変形できるものは“同じ”ものと考える幾何学です. 例えば, ドーナツの表面と取っ手のついたコップの表面は“同じ”ものですが, 地球の表面とは“違う”ものになります. (注:数学において, 何が“同じ”であるかということは大変重要なことです．三角形でも合同と相似という異なる“同じ”という概念を中学校で学んだと思います.)



一方，測度論は関数の積分に関する理論であり, 確率論とも密接な関係があるものです. 特に, 2次元の図形の測度は面積であり3次元の図形の測度は体積です．幾何学的な視点から見ると測度空間自体の構造は単純なものですが, 測度論は解析学には欠かせない道具です.
非可換測度論や非可換トポロジーという言葉は便利なものですが, 研究の本質を示しているわけではありません. それは, 作用素環論では可換な世界との類似よりも非可換にすることで表れる現象に興味を抱いて研究しているからです.

4. 対称性と自己同型

作用素環は量子力学の定式化, 作用素の解析や群のユニタリ表現論のために導入されたものですが, 純粋に現代の作用素環論での研究課題になるものの一つとして

「環の対称性を理解したい」

ということが挙げられます. 大雑把に述べると, 対称性を理解するということは「環にどのような変換がどれだけあるか」ということを研究するということです. 簡単な図形である円と正三角形に対してどのような変換があるか見てみましょう．どちらの図形に対しても回転させるという変換を考えることができます. 円はどんな角度の回転でも変換になることがわかりますが, 正三角形は$60^\circ, 120^\circ, 180^\circ$の回転でないと変換になりません．つまり，「円は無限の対称性を持つが, 正三角形は有限な対称性しか持たない」と言うこともできます. (注：変換は回転以外にも裏返すということも考えられます.) この変換のことを自己同型と呼びます.

豊富な対称性　　円と比べると少ない対称性

作用素環の自己同型の研究で課題となることは

「作用素環の自己同型を分類する」

ということです. つまり, 様々な群に対して「“おもしろい”自己同型の例を構成すること」や「いつ二つの自己同型が“同じ”になるか判定すること」が具体的な研究課題となります.

5. 作用素環の研究手法および面白さ

作用素環論は解析学という分野に属します. 環という代数系や群の研究なので代数学と思う方もいるかもしれませんが, 近似を用いた解析的な議論が作用素環の研究の基本的な方法なので分野としては解析学に属します．特に, “完備性”等を利用し, 近似の議論を用いて一見同じように見えないふたつの作用素環が同型であることを示すことが作用素環の議論の面白い所です. わかりやすい言い方をすると, 不等式を駆使して等式を示すということです.
C^*-環の自己同型の分類理論では, Bratteli-Elliott-Evans-Kishimotoにより確立された(approximate) intertwining argumentという手法[1]が中心的な役割を果たします. 大雑把に述べると, この手法の根底にある考え方は直接的に完全な対応を作ることができなくても交互に(ユニタリで摂動して恒等的な対応に)十分近い対応があれば完全な対応の存在を証明できるというものです. これは完備性と無限を利用した面白い議論です.

6. 研究成果

私は単純 stably projectionless C^*-環と呼ばれるC^*-環を研究しています. Stably projectionless C^*-環とは射影をまったく持たないC^*-環であり, 単位元も持ちません．作用素環論では射影が重要な働きをするので，このクラスのC^*-環の解析には様々な困難があります. $\mathcal{W}$と呼ばれ, 近年注目を集めている単純 stably projectionless C^*-環があります. $\mathcal{W}$の安定C^*-環$\mathcal{W}\otimes\mathbb{K}$にはトレイススケーリング自己同型という興味深い自己同型があることが知られています[2].
私は,「$\mathcal{W}\otimes\mathbb{K}$のトレイススケーリング自己同型が外部共役であることの必要十分条件はスケーリング因子が一致することである」という研究成果を得ました[3]. つまり, $\mathcal{W}\otimes\mathbb{K}$のトレイススケーリング自己同型を完全分類したということです.

References

[1] D. E. Evans and A. Kishimoto, *Trace scaling automorphisms of certain stable AF algebras*, Hokkaido Math. J. **26** (1997), no. 1, 211–224.

[2] A. Kishimoto and A. Kumjian, *Simple stably projectionless C^*-algebras arising as crossed products*, Canad. J. Math. **48** (1996), no. 5, 980–996.

[3] N. Nawata, *Trace scaling automorphisms of $\mathcal{W}\otimes\mathbb{K}$*, preprint, arXiv:1704.02414.