

エルゴード的保測変換の 位相力学系への表現

1 はじめに

この研究では純粋数学における**抽象的对象のみ**を扱う。正確に理解する為には、基礎知識として少なくとも学部数学科3年生レベルまでを要し、専門的知識としては大学院修士レベルまでを要する。ちなみに、推奨文献として、**測度論**では [6, 8, 2] を、**エルゴード理論**の専門書としては [7, 3, 9, 4] を挙げておく。

2 基礎知識

数学では『構造』が入った空間を土台にして議論を行うことが多い。この研究で扱う空間を簡単に説明する。

測度空間.

通常2次元空間や3次元空間内の図形には面積や体積が考えられる。一般の集合にもそのような**測度**を導入できる。測度込みの集合を測度空間という。全体の測度が有限か無限かによって数学的論証の困難さが変わってくる。

測度空間には、高校で習うリーマン積分よりも一般的性質を満たす**ルベーグ積分**が構築でき、その積分を通じて色々な性質が評価できる。

位相空間.

通常2次元空間や3次元空間では2点間の距離が考えられる。この2点間の近さを評価できる構造をもつ集合を位相空間とよぶ。距離が入る位相空間を距離空間とよぶ。位相空間には距離が入らないものもある。

力学系

測度空間や位相空間の構造を保つ全単射のことを**自己同型写像**と言う。空間と自己同型写像の対を**力学系**とよぶ。測度空間上の力学系を測度力学系とよび、位相空間上の力学系を位相力学系とよぶ。測度力学系が**エルゴード的**であるとは、時間平均と空間平均がすべての可積分関数に対して等しくなる状態を意味する。位相力学系が**極小**であるとは、すべての点の軌道が空間で稠密である（密に存在する）ことを意味する。

3 背景

上で紹介したように、力学系には測度力学系と位相

力学系が存在する。そこで、どちらの力学系の方がより豊富な力学系を表しているのかを評価する問題が考えられる。全空間の測度が有限な場合には、W. Krieger [1]によって、『**任意のエルゴード的測度力学系は一意的エルゴード的かつ極小な位相力学系として（測度力学系的に）同型表現可能**』という命題が証明されている。つまり、測度力学系の方が位相力学系より粗い物の見方をしていることが実証されたのである。

4 成果

[5]において、全空間の測度が無限（ σ -有限）の場合に、次の命題を証明した。『**全空間の測度が無限である任意のエルゴード的測度力学系は、不変Radon測度を（定数倍を除いて）一意にもつ極小な位相力学系として（測度力学系的に）同型表現可能**』

参考文献

- [1] W. Krieger. On unique ergodicity. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Vol. 2, pp. 327–346. University of California Press, Berkeley, Calif, 1972.
- [2] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 2005.
- [3] P. Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*, Vol. 79 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [4] B. Weiss. *Single Orbit Dynamics*, Vol. 95 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [5] H. Yuasa. Uniform sets for finite measure-preserving systems. *J. Anal. Math.*, Vol. 120, pp. 333–356, 2013.
- [6] 伊藤清三. ルベーグ積分入門. 裳華房, 1963.
- [7] 十時東生. エルゴード理論入門. 共立出版, 1971.
- [8] 猪狩惺. 実解析入門. 岩波書店, 1996.
- [9] 濱地敏弘, 伊藤雄二. エルゴード理論とフォン・ノイマン環, 紀伊国屋数学叢書, 第31巻. 紀伊国屋書店, 1992.