教員養成課程 数学教育専攻（数学教育講座） 馬場 良始

アルティン環

中学校で**結合法則**という概念を学んだことと思います。このようなものです：$a(bc)=(ab)c$. 引き算や割り算はこの結合法則を満たしません。実際，$1-(2-3)=1-(-1)=2\neq-4=(-1)-3=(1-2)-3$ ですし $1\div(2\div3)=1\div\frac{2}{3}=\frac{3}{2}\neq\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\div3=(1\div2)\div3$ です。そのため小学校の計算問題では，括弧がついていない場合は左から順に計算するというルールがありました。たとえば，$10-2-1$ はすぐ計算できる $2-1$ から計算を始めて $10-2-1=10-1=9$ と計算すると間違いとなり，左から順に計算をした $10-2-1=8-1=7$ が正解となります。しかし，足し算や掛け算は結合法則を満たしているので，どこから計算を始めても答えが同じとなり，計算しやすい部分から計算を始めればいいことになります。そもそも，常に左側から順に計算しなければならないというルールは窮屈で，数学的理論を深化させ，かつ大きく拡げていくとき邪魔になります。そのため，皆さんも中学生のとき教わったと思いますが，引き算や割り算が出てきたら，それらを結合法則を満たす足し算や掛け算に直して計算しましたね。例えば，$3-2=3+(-2)$ とか $2\div3=2\times\frac{1}{3}$ などです。このときの -2 を 2 の**加法に関する逆元**，$\frac{1}{3}$ を 3 の**乗法に関する逆元**と呼びます。つまり，逆元という概念を導入すると，結合法則を満たす，どこから計算を始めても答えが同じになる加法や乗法だけの世界にすることができるのです。さて 2 の加法に関する逆元 -2 は，2 にそれを足すと 0 になる数として，3 の乗法に関する逆元 $\frac{1}{3}$ は，3 にそれを掛けると 1 になる数として得られます。このように，加法における 0 や乗法における 1 は逆元という概念を考えるときの鍵ですが，これを**単位元**と呼びます。そしてこのようなことからごく自然に，次に定義する**群**と呼ばれる世界が考えられます。集合 G が**群**であるとは，G は空集合ではなく，そこには乗法が定義されていて（加法でもよい），それは結合法則を満たし，単位元をもち，すべての G の元は逆元をもつときです。例えば，整数全体の集合に普通の足し算を考えたものや，有理数全体の集合から 0 だけを取り除いた集合に掛け算を考えたものは群です。しかし，我々が通常使っている加減乗除は，逆元を考えて減法と除法を加法と乗法に置き換えても，加法と乗法という2つの結合法則を満たすものは残りますね。したがって，**環**と呼ばれる次のような世界を考えることも自然です。集合 R が**環**であるとは，加法と乗法が定義された空でない集合で，加法に関しては交換法則を満たす群，乗法に関しては結合法則を満たし，そして両方に関係する分配法則が成り立ち，さらに乗法の単位元 1 が存在しそれは加法の単位元 0 と異なるときです。環の典型例は整数全体のなす集合です。

さて，加減乗除をもう一度観察してみましょう。代表して足し算について考えて見ると，$1+1=2$ というおなじみの足し算は (1, 1) という2つの 1 という数の組に対して 2 という数を対応させるものと考えることができます。$1+2=3$ も同じように (1, 2) という2つの数の組に対して 3 という数を対応させるものです。つまり，足し算とは，2つの数の組おのおのに対して1つの数を対応させていくものなのです。このような視点をもつと，どんな集合 S にも足し算が定義できることになります。実際，S の元の組 (a, b) それぞれに対してある S の元 c を対応させる規則を作り，それを足し算記号 $+$ で $a+b=c$ と表すことにすれば，集合 S に足し算が定義されたことになります。このようなものを**演算**と呼び，ここで用いた足し算の記号 $+$ を**演算記号**と呼びます。演算記号は何でもいいのですが，通常は足し算記号 $+$ と掛け算記号 $\cdot$（$\times$ は別の使われ方があるので演算記号としては使われません）が主に使われ，$+$ を使うときその演算を**加法**，$\cdot$ を使うときその演算を**乗法**と呼びます。上で定義した群や環の加法と乗法はこのように定義した演算で定義されます。つまり，数の世界から離れて，数の世界を含むより広い世界で考えるのです。

このように，どのような集合であれ，そこに加法や乗法を定義して群や環を（**体**という重要概念もあります）考えることにより，数の世界で考えているだけでは思いもよらない美しい世界が広がって行きます。そしてその美しい世界で生み出された様々な結果が，それを巧みに応用する人たち（応用数学者・物理学者・工学系研究者・経済学研究者・・・・）の手により，現代の文明を支える様々なテクノロジーを生み出し支える役割を果たしてきました。（ただ，数学者は自分の研究が応用され，世の中の役に立つかどうか，という基準で研究を行っていません。むしろ応用できるかを一切考えず，目の前の疑問点を自分の純粋な好奇心で解き明かすことにより生み出された研究が，後の時代にブレイクスルーを果たした応用技術を支える理論になっていることはよくあることです。）

さて，環の構造研究は**イデアル**と呼ばれる概念によるものが重要です。環の右（左）イデアルとは，環の空でない部分集合で，加法について部分群であり（環の加法を借用してその部分集合が小さな群をなしていること），その部分集合の任意の元に環のどんな元を右（左）から乗じてもまたその部分集合の元 になるものです。そして環を細かく研究するために，美しい性質が表れるような様々な付加条件が考えられます。その中の1つとして**降鎖条件**と呼ばれるものがあります。これはだんだん小さくなっていく右（左）イデアルの 列：$I_1\supseteq I_2\supseteq I_3\supseteq I_4\supseteq\cdots$ はどれもどこまでも真に小さくなり続けることはない，という条件で，この条件を満たす環が**右（左）アルティン環**と呼ばれるものであり，ウィーン生まれの数学者エミール・アルティン（1892-1962）に因んで命名されました。私の研究の主なターゲットはこのアルティン環です。重要なアルティン環には，中山環，東屋の exact 環，原田環等，日本人の名前が付くものが多く存在し，その貢献の度合いが推し量られます。私は，原田環の視点からの中山環や準フロベニウス環（QF環）の研究を行ったり，様々なアルティン環の森田自己双対性に関する研究を行ったり，Ringel・太刀川による QF-3 環の構造定理のアルティン環への応用を行ったり，lifting property や extending property に関連する特殊な射影加群や移入加群の研究を行っています。