国立大学法人 大阪教育大学

教員養成課程　数学教育専攻 (数学教育講座)　岡安　類

作用素環の分類

1. 作用素環とは

作用素環の研究は **von Neumann** が量子力学の数学的基礎付けを目的に取り組み始めたものでしたが, 現在では数理物理学だけにとどまらず, 幾何学, 群論, エルゴード理論など幅広い応用があります. 当初, **von Neumann** は **"Ring of Operators"** と呼んでいましたが, 現在は **Operator Algebra** (作用素代数) と呼ばれています. 日本では今も **Ring of Operators** を直訳した作用素環と呼んでいます. では作用素(**Operator**)と環(**Ring**)について説明しましょう. (より詳しくは[1], [2]を参照.)

高校数学における"フィナーレ"は微分積分です. 微分積分を用いると, 未知の関数を調べることができました. 例えば, 導関数の情報からグラフの概形がわかったり, 積分をすることで関数で囲まれた図形の面積を求めることができました. このように高校までは与えられた個々の関数の性質を調べていました. それでは関数の集合はどのような性質をもっているでしょうか? 例えれば, 1本の木をじっくりと見るのではなく森全体を眺めるということです. まずは最も馴染みのある実数の集合を考えてみましょう.

すべての実数からなる集合を $\mathbb{R}$ で表します. 実数の集合 $\mathbb{R}$ は足し算, 引き算, 掛け算という数学的構造をもちます. このような集合を数学では環(かん)と呼びます. 実際には割り算もできるので, 環よりも体(たい)と呼ばれます. 同様に複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ も加減乗除ができますから体となります. 次に体ではない環の例を紹介します.

実数(または複素数)を成分に持つ 2×2 行列全体を $\mathbb{M}_2$ で表します. このとき, 足し算, 引き算, 掛け算は次のように定義されました:

$$A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} p & q\\ r & s\end{bmatrix} \text{ に対して，}\quad A\pm B:=\begin{bmatrix} a\pm p & b\pm q\\ c\pm r & d\pm s\end{bmatrix},\quad A\times B:=\begin{bmatrix} ap+br & aq+bs\\ cp+dr & cq+ds\end{bmatrix}.$$

このとき行列 A に対して, 逆行列 A^{-1} がいつもあるとは限りません. 言い換えれば, いつでも割り算ができるとは限らないことになります. したがって $\mathbb{M}_2$ は体ではない環であることがわかります. 更に $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ との違いがもう1つあります. 行列の掛け算は交換法則 $AB=BA$ が成り立ちません. この掛け算の"非可換性"がもう1つの大きな特徴であることを注意しておきます.

それでは, 関数の話に戻りましょう. 閉区間 $[0,1]$ 上で定義された連続な実数値関数全体の集合 $C[0,1]:=\{f\colon[0,1]\to\mathbb{R}\mid f \text{ は連続}\}$ を考えます. 集合 $C[0,1]$ には, 足し算, 引き算, 掛け算が次のように定義されます:

$$\text{関数 } f,g \text{ に対して，}\quad (f\pm g)(t):=f(t)\pm g(t),\ (f\times g)(t):=f(t)g(t).$$

もし関数 f に対して, $f(a)=0$ となる点 a が存在すれば, 割り算ができないこともわかります. 以上により, 関数の集合 $C[0,1]$ は体ではない環であることがわかります. 一方で $\mathbb{M}_2$ との違いは, 掛け算の交換法則が成り立つことです:

$$(f\times g)(t)=f(t)g(t)=g(t)f(t)=(g\times f)(t).$$

更に $\mathbb{M}_2$ と $C[0,1]$ の大きな違いは"無限次元性"があります. 次元の概念は, 大学1回生で学ぶ線形代数学の知識が必要なので詳細は避けますが, 簡単に言えば次の通りです. まず $\mathbb{M}_2$ は4次元になります. 例えば, 行列 E_{ij} を (i,j) 成分を 1 とし, 残りの成分をすべて 0 とします:

$$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

このとき,

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} \text{ に対して，}\quad A=aE_{11}+bE_{12}+cE_{21}+dE_{22}$$

と表されます. つまり $\mathbb{M}_2$ のすべての行列が, 4 つの行列 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ の和とスカラー倍で(一意的に)表すことができるからです. 一方, 有限個の関数ですべての連続関数を表現することはできませんから $C[0,1]$ は無限次元となります. (詳細は省略.)

次に, 作用素について説明しましょう. $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を考えます. もし等式 $f(s+t)=f(s)+f(t)$ が成り立つとき, f は線形であると言います. 高校数学の練習問題で"上の等式を満たす連続関数 f の形を決定せよ"というのがありますが, 答えは原点を通る直線です. "線形(**linear**)"という言葉はこの直線(**line**)から来ています. また微分と積分も線形性を持ちます:

$$\{f(t)+g(t)\}'=f'(t)+g'(t),\qquad \int_a^b\{f(t)+g(t)\}\,dt=\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b g(t)\,dt.$$

言い換えれば, 足し算と微分(または足し算と積分)の操作は順序交換が可能であることを意味しています. つまり, ある操作が足し算と"相性が良い"とき, 線形と言います.

最後に行列も線形性を持ちます. 行列 A をベクトル $\vec{x}$ に左から掛ける操作は線形です. つまり, $A(\vec{x}+\vec{y})=A\vec{x}+A\vec{y}$ が成り立ちます. このように線形性をもつ"操作"のことを線形作用素と言います. 作用素環の作用素とは, この線形作用素のことであり, 線形作用素の集合が足し算, 引き算, 掛け算の数学的な構造を持つとき, つまり環であるとき, 作用素環となるわけです.

したがって, $\mathbb{M}_2$ は有限次元の作用素環です. また, $C[0,1]$ は(掛け算が)可換な作用素環になります. 以上により, 高校数学までに学んできた, 一見まったく関係なさそうな関数や行列は同じ土俵にのっていることがわかりました. 作用素環の枠組みでは両者を区別することなく議論が可能になるわけです. 実は, 有限次元の作用素環は行列からなる作用素環であり, 可換な作用素環は関数からなる作用素環しか存在しないことが知られています. 行列も関数も大変重要な数学の研究対象ですが, 作用素環では"自明"なものと見なされます. つまり, 作用素環の研究者の立場から"面白い"作用素環とは, "無限次元"かつ"非可換"な作用素環を意味します.

2. 面白い作用素環の例

一般に自然数 n に対して 複素数を成分に持つ $n\times n$ 行列全体 $\mathbb{M}_n$ も作用素環です. 行列環 $\mathbb{M}_n$ にはトレースと呼ばれる重要な関数(正確には汎関数)を持ちます:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix} \text{ に対して，}\quad \mathrm{tr}_n(A):=\frac{1}{n}(a_{11}+\cdots+a_{nn}).$$

なぜ重要なのかと言うと次の性質を持つからです:

$$A,B\in\mathbb{M}_n \text{ に対して，}\quad \mathrm{tr}_n(AB)=\mathrm{tr}_n(BA).\qquad \text{(トレース条件)}$$

行列の掛け算は交換法則が成り立たないことは既に述べましたが, 実はこのトレースを被せることによって"交換法則"が成り立ってしまうのです. 作用素環の研究の難しさに掛け算の非可換性がありますが, トレースのこの性質が作用素環の構造を理解するための手助けしてくれます. このトレースにも注目しながら"面白い"作用素環の例を紹介しましょう.

次のように $\mathbb{M}_2$ を $\mathbb{M}_4$ の一部分と見なすことができます:

$$\mathbb{M}_2\ni A\mapsto\begin{bmatrix}A&0\\0&A\end{bmatrix}\in\mathbb{M}_4.$$

この同一視により $\mathbb{M}_2\subset\mathbb{M}_4$ と思います. さらにこの同一視はトレース込みで成立します. つまり $A\in\mathbb{M}_2$ に対して, 素直に $\mathrm{tr}_2(A)$ を考えることと, 上の同一視を通して $\mathbb{M}_4$ の中で $\mathrm{tr}_4(A)$ を考えても同じ値が得られます. この意味で $(\mathbb{M}_2,\mathrm{tr}_2)\subset(\mathbb{M}_4,\mathrm{tr}_4)$ と書くことにしましょう. 以下同様に,

$$(\mathbb{M}_2,\mathrm{tr}_2)\subset(\mathbb{M}_4,\mathrm{tr}_4)\subset(\mathbb{M}_8,\mathrm{tr}_8)\subset\cdots\subset(\mathbb{M}_{2^n},\mathrm{tr}_{2^n})\subset\cdots\ \rightsquigarrow\ (R,\tau)$$

と次々と増大する作用素環が得られます. ここで"適当な極限操作"(詳細は省略)を行い, 無限次元の作用素環 R が得られます. こうして作用素環とトレースの組 (R,τ) が得られます. 作用素環 R は **AFD** II_1 型因子環 と呼ばれています. すべての作用素環は因子環の(連続的)直和に分解されるので, 因子環とは作用素環の最小単位みたいなものです. 作用素環の本格的な研究は1932年に **Murray** と **von Neumann** によって始められましたが, 彼らの時代から因子環が中心的な研究対象となっています. また **AFD** は **Approximately Finite Dimensional** (近似的有限次元)の頭文字です. 作り方からもこの R は有限次元作用素環で近似されていることが容易に想像できると思います. 作用素環の初期の研究段階で, **Marray** と **von Neumann** は **AFD** II_1 型因子環の一意性を示しました. 例えば, 上の構成において $\mathbb{M}_3$ からスタートして, $\mathbb{M}_3\subset\mathbb{M}_9\subset\mathbb{M}_{27}\subset\cdots\subset\mathbb{M}_{3^n}\subset\cdots$ を考えても結局は同じ R が得られることを意味しています. これは全く明らかなことではなく, 作用素環の最も基本的な結果の1つです.

射影のトレースの値を調べることによってもう少し詳しく R を調べてみましょう. 行列環 $\mathbb{M}_n$ は数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ に左からの掛け算で作用していました. 全体空間 $\mathbb{C}^n$ は n 次元ですから, 部分空間は $0,1,2,\ldots,n$ 次元のいずれかになります. 部分空間に対応する行列を射影と言います. 例えば, 対角に 1 を k 個並べて, それ以外の成分はすべて 0 とした行列が射影の例 P_k です. $\mathbb{M}_n$ は実質的にはこれ以外の射影を持ちません. これら射影のトレースの値を見ると, $\mathrm{tr}_n(P_k)=k/n$ となります. よって射影のトレースの値は, $0,1/n,2/n,\ldots,1$ と離散的です. 一方, R において, $\mathbb{M}_2\subset R$ ですから射影のトレースの値に $0,1/2,1$ です. 更に $\mathbb{M}_4\subset R$ より $0,1/4,1/2,3/4,1$ が得られます. 以下同様にすれば, $k/2^n$ $(k=0,1,2\ldots,2^n)$ が得られることがわかります. 更に"極限操作"を行って閉区間 $[0,1]$ の値がすべて得られることが想像できるでしょう. このように射影のトレースの値が連続的に得られるため $\mathbb{M}_n$ とは決定的に違うことがわかると思います.

3. 作用素環の分類

$\mathbb{M}_n$ と R の射影のトレースの値がそれぞれ離散的と連続的になることを見ました. これらは I_n 型と II_1 型と分類されます. それぞれのトレースは正規化されたものです. つまり $\mathrm{tr}_n(I)=1$ や $\tau(I)=1$ が成立します. I は掛け算に関する単位元であり, 全体空間に対応する射影でもあります. 因子環で正規化されたトレースは持たないが, トレース条件を満たす"汎関数"が存在するとき($\tau(I)=+\infty$ となるトレース), **AFD**因子環はそれぞれ $\mathbb{B}(H)$ (可算無限次元 **Hilbert** 空間 H 上の有界線形作用素全体)と $R\bar{\otimes}\mathbb{B}(H)$ があり, I_∞ 型と II_∞ 型と呼ばれます. トレースを持たない因子環は III 型と言います. III 型因子環にはトレースが存在しないため, 作用素の非可換性が大きな障害となり初期の研究からしばらく停滞していましたが, 冨田-竹崎理論が III 型因子環の構造解析を可能にしました. これを基本的な道具として III 型因子環は **Connes** により細かく III_λ 型$(0\leqq\lambda\leqq1)$と分類され, 多くの構造定理が得られました. その後, **Connes** と **Haagerup** によって III_0 型を除く残りの**AFD**因子環がそれぞれただ1つしかないことを証明しました:

$$\begin{cases}
\mathrm{I}_n\text{型} & \mathbb{M}_n(1\leq n<\infty),\mathbb{B}(H)(n=\infty) & \\
\mathrm{II}_1\text{型} & R & \textbf{(Murray-von Neumann)}\\
\mathrm{II}_\infty\text{型} & R\bar{\otimes}\mathbb{B}(H) & \textbf{(Connes)}\\
\mathrm{III}_\lambda\text{型}(0<\lambda<1) & \textbf{Powers}\text{因子環 }R_\lambda & \textbf{(Connes)}\\
\mathrm{III}_1\text{型} & \text{荒木-}\textbf{Woods}\text{因子環 }R_\infty & \textbf{(Haagerup)}
\end{cases}$$

AFD III_1 型因子環の一意性は **Connes** の与えた十分条件を **Haagerup** が証明することによって完成しましたが, 最近 **Haagerup** による別証明[3]が発表されたことを追記しておきます.

4. 参考文献

[1] 数理物理学の方法：ノイマン・コレクション(ちくま学芸文庫) J.フォン ノイマン (著), 伊東 恵一 (翻訳), 山田 道夫 (翻訳), 新井 朝雄 (翻訳), 一瀬 孝 (翻訳), 岡本 久 (翻訳), 高橋 広治 (翻訳)

[2] 作用素環の数理：ノイマン・コレクション (ちくま学芸文庫) J. フォン・ノイマン (著), John von Neumann (原著), 長田 まりゑ (翻訳), 岡安 類 (翻訳), 片山 良一 (翻訳), 長田 尚 (翻訳)

[3] Uffe Haagerup; On the Uniqueness of the Injective III_1 Factor. Documenta Math. 21 (2016) 1193–1226